|  |  |
| --- | --- |
| **全书复习** | **备注** |
| **知识点回顾**  **第一部分：基本要求（计算方面）**   1. **四阶行列式的计算(或含参数的行列式的计算)；**   行列式   1. ***N*阶特殊行列式的计算（如有行和、列和相等）；** 2. **矩阵的运算（包括加、减、数乘、乘法、转置、逆矩阵、伴随矩阵等的混合运算）；**   矩阵   1. **求矩阵的秩、逆（两种方法）；** 2. **含参数的线性方程组解的情况的讨论；**   解线性方程组   1. **齐次、非齐次线性方程组的求解（包括唯一、无穷多解）；** 2. **讨论一个向量能否用和向量组线性表示；**   向量组相关性   1. **讨论或证明向量组的相关性；** 2. **求向量组的极大无关组，并将多余向量用极大无关组线性表**   **示；**   1. **将无关组正交化、单位化；** 2. **求方阵的特征值和特征向量(包括已经特征值/向量,求矩阵)；** 3. **讨论方阵能否对角化，如能，要能写出相似变换的矩阵及对角**   相似  矩阵  及  二次型  **阵；**   1. **通过正交相似变换（正交矩阵）将对称矩阵对角化；** 2. **写出二次型的矩阵，并将二次型标准化，写出变换矩阵；** 3. **判定二次型或对称矩阵的正定性。**   **第二部分：基本知识**  **一、行列式**  **1．行列式的定义**  **用个元素组成的记号称为n阶行列式。**  **（1）它表示所有可能的取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和；**  **（2）展开式共有项，其中符号正负各半；**  **2．行列式的计算**   1. **一阶行列式，二、三阶行列式有对角线法则；**  1. **阶（）行列式的计算：降阶法**   **定理：阶行列式的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对**  **应的代数余子式乘积的和。**  **方法：选取比较简单的一行（列），保保留一个非零元素，其余**  **元素化为0，利用定理展开降阶。**   1. **特特情况**    1. **上、下三角形行列式、对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积；**   **（2） 行列式值为0的几种情况：**  **Ⅰ　行列式某行（列）元素全为0；**  **Ⅱ　行列式某行（列）的对应元素相同；**  **Ⅲ　行列式某行（列）的元素对应成比例；**  **Ⅳ　奇数阶的反对称行列式。**  **二．矩阵**  **1．矩阵的基本概念（表示符号、一些特殊矩阵――如单位矩阵、对角、对称矩阵等）；**  **2．矩阵的运算**  **（1）加减、数乘、乘法运算的条件、结果；**  **（2）关于乘法的几个结论：**  **①矩阵乘法一般不满足交换律（若，称是可交换矩阵）；**  **②矩阵乘法一般不满足消去律、零因式不存在；③若为同阶**  **方阵，则；**  **3．矩阵的秩**  **（1）定义　非零子式的最大阶数称为矩阵的秩；**  **（2）秩的求法　一般不用定义求，而用下面结论：**  **矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；阶梯形矩阵的秩等于非零行的**  **个数（每行的第一个非零元所在列，从此元开始往下全为0的矩阵称为行阶梯阵）。**  **求秩：利用初等变换将矩阵化为阶梯阵得秩。**  **4．逆矩阵**  **（1）定义：为n阶方阵，若，称可逆，是的逆矩阵（满足半边也成立）；**  **（2）性质：　，；**  **（3）可逆的条件：**  **①　；　②; ③**  **（4）逆的求解**  **①伴随矩阵法　；**  **②初等变换法**  **5．用逆矩阵求解矩阵方程：**  **①，则；**  **②，则；**  **③，则**  **三、线性方程组**  **1．线性方程组解的判定**  **定理：**  **2．齐次线性方程组**  **（1）解的情况：**  **，（或系数行列式）只有零解；**  **，（或系数行列式）有无穷多组非零解。**  **（2）解的结构：**  **。**  **（3）求解的方法和步骤：**  **①将增广矩阵通过行初等变换化为最简阶梯阵；**  **②写出对应同解方程组；**  **③移项，利用自由未知数表示所有未知数；**  **④表示出基础解系；**  **⑤写出通解。**  **3．非齐次线性方程组**  **（1）解的情况：**  **利用判定定理。**  **（2）解的结构：**  **。**  **（3）无穷多组解的求解方法和步骤：**  **与齐次线性方程组相同。**  **（4）唯一解的解法：**  **有克莱姆法则、逆矩阵法、消元法（初等变换法）。**  **四、向量组**  **1．维向量的定义**  **注：向量实际上就是特殊的矩阵（行矩阵和列矩阵）。**  **2．向量的运算：**  **（1）加减、数乘运算（与矩阵运算相同）；**  **（2）向量内积　；**  **（3）向量长度**  **（4）向量单位化　；**  **（5）向量组的正交化（施密特方法）**  **设线性无关，则**  **，**  **，**  **，………。**  **3．线性组合**  **（1）定义　若，则称是向量组的一个线性组合，或称可以用向量组的一个线性表示。**  **（2）判别方法　将向量组合成矩阵，记**  **，**  **若　，则可以用向量组的一个线性表示；**  **若　，则不可以用向量组的一个线性表示。**  **（3）求线性表示表达式的方法：**  **将矩阵施行行初等变换化为最简阶梯阵，则最后一列元素就是表示的系数。**  **4．向量组的线性相关性**  **（1）线性相关与线性无关的定义**  **设，**  **若不全为0，称线性相关；**  **若全为0，称线性无关。**  **（2）判别方法：**  **① ，线性相关；**  **，线性无关。**  **②若有个维向量，可用行列式判别：**  **，线性相关（无关）**  **5．极大无关组与向量组的秩**  **（1）定义　极大无关组所含向量个数称为向量组的秩**  **（2）求法　设)，将化为阶梯阵，则的秩即为向量组的秩，而每行的第一个非零元所在列的向量就构成了极大无关组。**  **五、矩阵的特征值和特征向量**  **1．定义　对方阵，若存在非零向量和数使**  **，则称是矩阵的特征值，向量称为矩阵的对应于特征值的特征向量。**  **2．特征值和特征向量的求解：**  **求出特征方程的根即为特征值，将特征值代入对应齐次线性方程组中求出方程组的所有非零解即为特征向量。**  **3．重要结论：**  **（1）可逆的充要条件是的特征值不等于0；**  **（2）与的转置矩阵有有相同的特征值；**  **（3）不同特征值对应的特征向量线性无关。**  **六、矩阵的相似**  **1．定义　对同阶方阵、，若存在可逆矩阵，使，则称与相似。**  **2．求与对角矩阵相似的方法与步骤（求和）：**   1. **求出所有特征值；** 2. **求出所有特征向量；** 3. **若所得线性无关特征向量个数与矩阵阶数相同，则可对角化（否则不能对角化），将这个线性无关特征向量组成矩阵即为相似变换的矩阵，依次将对应特征值构成对角阵即为。**   **3．求通过正交变换与实对称矩阵相似的对角阵：**  **方法与步骤和一般矩阵相同，只是第三歩要将所得特征向量正交化且单位化。**  **七、二次型**  **1．定义　元二次多项式称为二次型，若，则称为二交型的标准型。**  **2．二次型标准化：**  **配方法和正交变换法。正交变换法步骤与上面对角化完全相同，这是由于对正交矩阵，，即正交变换既是相似变换又是合同变换。**  **3．二次型或对称矩阵的正定性：**  **（1）定义（略）；**  **（2）正定的充要条件：**  **①为正定的充要条件是的所有特征值都大于0；**  **②为正定的充要条件是的所有顺序主子式都大于0；**  **例题讲解**  **例1 计算．**  **解 ：**  **例2 计算 .**  **解法1 ： “”**      **解法2： 加边法**        **例3 设 满足, 求．**  **解：并项：**  **左乘：**  **计算：**    **例4 求解, ,**  **解：**    **(1) ：同解方程组为**  **基础解系 , 特解**  **通解为 （为任意常数）**  **(2) ：同解方程组为**  **基础解系 , ,**  **特解**  **通解为 （为任意常数）**    **例5 向量组：, , ,**  **求向量组的一个最大无关组。**  **解： 对矩阵 进行初等行变换可得**      **(1) ：**  **的1,2,3,4列线性无关的1,2,3,4列线性无关**  **故是的一个最大无关组；**  **(2) ：**  **的1,2,3列线性无关的1,2,3列线性无关**  **故是的一个最大无关组．**  **例6**  **用正交变换化为标准形．**  **解 ：的矩阵**  **的特征多项式**  **的两个正交的特征向量 ,**  **的特征向量**  **正交矩阵**  **正交变换：标准形**  **例7 ,秩．**  **(1) 求；**  **(2) 用正交变换化为标准形．**  **解： (1) 的矩阵 （显见）**    **(2)**    **的特征向量依次为**  **, , （两两正交）**  **正交矩阵**  **正交变换**  **标准形**  **例8 设的一个特征向量为, 求数及的**  **全体特征值与特征向量．**  **解 ：**    **：**  **由此可得：对应特征值只有1个线性无关的特征向量, 而特征**  **方程的基础解系为, 全体特征向量为。**  **例9 设方阵的特征值, 对应的特征向量分别为, 证明：**  **(1) 不是的特征向量；**  **(2) ,线性无关．**  **证明 (1) 反证法．若, 则**    **线性无关 矛盾！**  **故不是的特征向量．**  **(2) 设数组使得 , 则**    **线性无关**  **即．故,线性无关．** |  |